Ejemplo: Una cierta enfermedad afecta a 1 de cada 10,000 personas. Existe una prueba para determinar si una persona tiene la enfermedad. En particular se sabe que

- $P(T \mid D^c) = 0.02 = \dfrac{200}{10{,}000}$
- $P(T^c \mid D) = 0.01 = \dfrac{100}{10{,}000}$

D - la persona tiene la enfermedad
T - la prueba sea positiva

Una persona se elige de manera aleatoria, se le hace la prueba y la prueba sale positiva.
¿Cuál es la probabilidad de que esta persona esté enferma?

$$P(D \mid T) = \frac{P(T \mid D)\, P(D)}{P(T \mid D)\, P(D) + P(T \mid D^c)\, P(D^c)}$$

$$= \frac{(0.99)\frac{1}{10{,}000}}{(0.99)\left(\frac{1}{10{,}000}\right) + (0.02)\left(1 - \frac{1}{10{,}000}\right)} = 0.0049$$

¿Cómo podemos ver esto de otra manera?

$P(D)$ es muy pequeña

$N = 1{,}000{,}000$

- $NP(D) = 100$
  - $NP(D)P(T|D) = 99$
  - $NP(D)P(T^c|D) = 1$
- $NP(D^c) = 999{,}900$
  - $NP(D^c)P(T|D^c) = 19{,}998$
  - $NP(D^c)P(T^c|D^c) = 979{,}902$

$$P(D|T) = \frac{99}{99 + 19{,}998} = \frac{\text{enfermos que dieron positivo}}{\text{enfermos que dieron positivo} + \text{no están enfermos y dieron positivo}}$$

Independencia

En general $P(A|B) \neq P(A)$, en este caso el saber que B ha ocurrido impacta la probabilidad de la ocurrencia de A. Pero y si

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow$$ obviamente saber que B ha ocurrido no nos dice nada acerca de

los eventos A y B son independientes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P(A \cap B) = P(B)P(A)}$$

$\Rightarrow$ Dos eventos A y B son independientes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Generalización de independencia, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son independientes $\Leftrightarrow$

$$\underline{P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_j)}$$

Lema. Si A y B son independientes

$\Rightarrow$ a) A y B^c son independientes
b) A^c y B son independientes
c) A^c y B^c son independientes

Dem.

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

a) $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$

$$\Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$$
$$= P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)(1-P(B))$$
$$= P(A)P(B^c)$$

$\square$

c) $P(A^c\cap B^c) = P((A\cup B)^c)$
$$= 1 - P(A\cup B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)]$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$$
$$= P(A^c) - [P(B) - P(A)P(B)]$$
$$= P(A^c) - P(B)(1-P(A))$$
$$= P(A^c)(1-P(B)) = P(A^c)P(B^c)$$

$\square$

Ejemplo: Se tiene la teoría de que cierta enfermedad hereditaria está presente en el 10% de la población. Si se seleccionan 3 alumnos de manera aleatoria en una escuela y se les aplica una prueba para detectar la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que todos tengan la enfermedad? ¿De que sólo uno tengan la enfermedad?

Asume independencia

$X_j = 1$ el alumno j-ésimo dio positivo a la prueba

$X_j = 0$ el alumno j-ésimo dio negativo

$$P\left(\sum_{j=1}^{3} X_j = 10\right) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)$$

$$= \prod_{j=1}^{3} P(X_j = 1) = p^3$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{3} X_j = 1\right) = P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0)$$

$$+ P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0)$$

$$+ P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1)$$

$$3p(1-p)^2$$

Importante: A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos

$\iff P(A \cap B) = 0$

$\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A y B son independientes $\iff$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Lema. Considere 2 eventos independientes A y B con $P(A) > 0$ y $P(B > 0)$. Si A y B son disjuntos

$\implies$ A y B no son independientes

Dem

$$P(A \cap B) = 0 \neq \overbrace{P(A)}^{>0}\,\overbrace{P(B)}^{>0}$$

Ejemplos:

Para 3 eventos A, B y C se tiene que

- A y C son independientes
- B y C son independientes
- A y B son disjuntos
- $P(A \cup C) = 2/3$, $P(B \cup C) = 3/4$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$

Encuentra $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$

$$\tfrac{2}{3} = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$
$$\tfrac{3}{4} = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$\tfrac{11}{12} = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

$$\tfrac{2}{3} = P(A) + P(C) - P(A)P(C)$$
$$\tfrac{3}{4} = P(B) + P(C) - P(B)P(C)$$
$$\tfrac{11}{12} = P(A) + \tfrac{3}{4} - P(A)P(C)$$

$$\tfrac{3}{12} = \tfrac{9}{12} - P(C) \Rightarrow P(C) = \tfrac{6}{12} = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{3}{4} = P(B) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}P(B)$$

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}P(B) \Rightarrow \underline{\underline{P(B) = \tfrac{1}{2}}}$$

$$\tfrac{2}{3} = P(A) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}P(A)$$

$$\tfrac{4}{6} - \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}P(A)$$

$$\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}P(A) \Rightarrow P(A) = \tfrac{1}{3} \quad \square$$

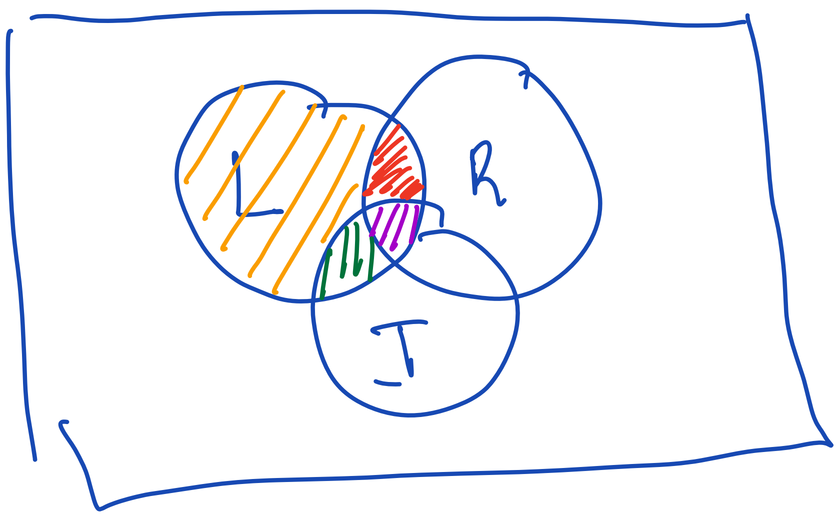
En una ciudad llueve 1/3 de los días del año. $P(R) = 1/3$

$$P(T \mid R) = 1/2$$
$$P(T \mid R^c) = 1/4$$
$$P(L \mid R \cap T) = 1/2$$
$$P(L \mid R^c \cap T^c) = 1/8$$
$$P(L \mid R \cap T^c) = P(L \mid R^c \cap T) = 1/4$$

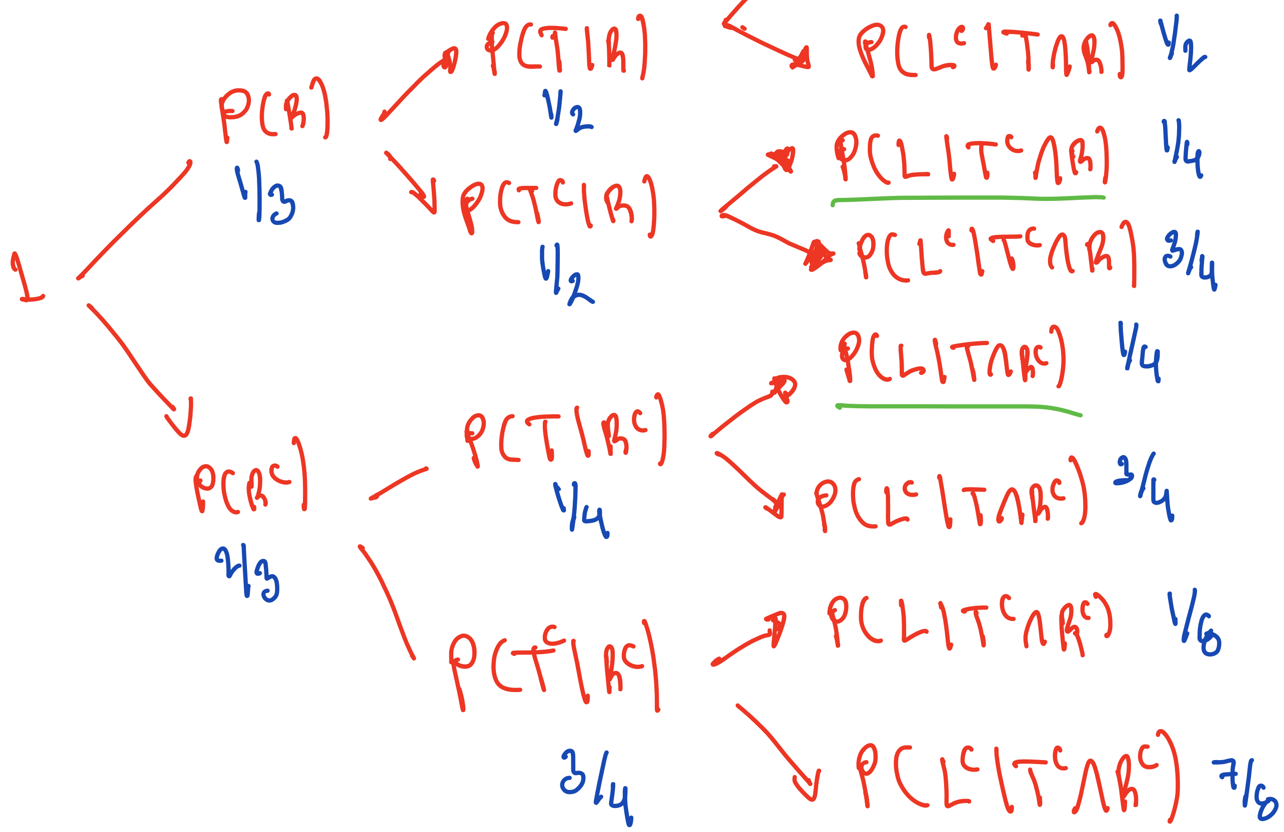
T = { Mucho tráfico }
R = { llueve }
L = { llego tarde al trabajo }

¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera llegue tarde al trabajo?

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j) P(B_j)$$



$P(L \mid T \cap R)$ 1/2



$$\Rightarrow P(L) = P(L|T\cap R)\,P(T\cap R) + P(L|T^c\cap R)\,P(T^c\cap R) + P(L|T\cap R^c)\,P(T\cap R^c) + P(L|T^c\cap R^c)\,P(T^c\cap R^c)$$

$$= (1/2)(1/6) + (1/4)(1/6) + (1/4)(1/6) + (1/8)(1/2)$$

$$= 1/6\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{8}{8} + \frac{3}{8}\right] = \left(\frac{11}{8}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{48}$$

$$\approx 23\%$$

Idea

1

$P(A)$

$P(B|A) \Rightarrow P(B\cap A) = P(B|A)P(A)$

$P(B^c|A) \Rightarrow P(B^c\cap A) = P(B^c|A)P(A)$

$P(A^c)$

$P(B|A^c) \Rightarrow P(B\cap A^c) = P(B|A^c)P(A^c)$

$P(B^c|A^c) \Rightarrow P(B^c\cap A^c) = P(B^c|A^c)P(A^c)$

Esto se puede extender a 3 eventos o mas